Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen 14 januari 2019

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768 237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Väl redovisade lösningsförslag som visar att du har förstått problemet, bakomliggande teori och en möjlig lösningsmetod, ger delpoäng även om ditt svar är ofullständigt.

---

1. En studiekamrat till dig (som inte läst kursen i matematisk fysik!) har kört fast i ett kapitel i sin lärobok i kvantstatistisk mekanik. I inledningen till kapitlet sägs att

The topics of this chapter, linear-response theory, causality, the Kramers-Kronig relations, and the fluctuation-dissipation theorem, are closely connected and belong to the most important and at the same time most complicated issues of quantum statistics. Fortunately, by recalling some basics of Green's functions and residue calculus, things simplify a lot.

Din kompis suckar: *"... helt obegripligt! Och jag som har läst komplexen och diffekvationer!"*
Kan du hjälpa hen genom att reda ut begreppen ovan, speciellt hur Greenfunktioner och residykalkyl kommer in i bilden?

2. Amperes lag,

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0 I,$$

där $\boldsymbol{B}$ är ett magnetfält, C en sluten kurva som begränsar en yta $\mathcal{A}$, μ_0 vakuumpermeabiliteten, och I strömmen genom ytan $\mathcal{A}$, brukar i elementära kurser i elektromagnetism härledas med hjälp av vektoranalys. Visa att Amperes lag också enkelt kan tas fram via Cauchys residyteorem!
Ledning: Givet en ström I längs $\hat{z}$-axeln i ett tredimensionellt kartesiskt koordinatsystem (x, y, z) med tillhörande magnetfält $\boldsymbol{B}$ med komponenter B_x och B_y längs $\hat{x}$- respektive $\hat{y}$-axeln, undersök integralen av den komplexa funktionen $f(z) = B_y + iB_x$ längs en sluten kurva runt origo i det komplexa talplanet $\{z \,|\, \mathrm{Re\ z} = x, \mathrm{Im\ z} = y\}$. Använd Biot-Savarts lag, $|\boldsymbol{B}| = \mu_0 I/2\pi r$ där r är avståndet från origo, för att först ta fram uttryck för B_x och B_y som funktioner av x, y och strömmen I.

3. a) Ibland är det praktiskt att skriva om en differentialekvation till en *integralekvation*, t.ex. i kvantmekanisk spridningsteori, något som vi såg exempel på i en av mina föreläsningar. Vilken är den väsentliga poängen med att göra en sådan omskrivning?

b) Betrakta den ordinära differentialekvationen

$$L_x u(x) = \rho(x)u(x) + g(x),$$

där L_x är en linjär differentialoperator, $\rho(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner, och den okända funktionen $u(x)$ uppfyller givna randvillkor i $x = a, b$. Givet att L_x har en känd Greenfunktion $G(x, y)$, skriv om diffekvationen ovan till en integralekvation. Vad för slags integralekvation är detta? Diskutera (mycket kortfattat) hur en sådan ekvation kan lösas!

c) Betrakta den andra ordningens ordinära differentialekvation

$$u''(t) = g(t, u(t)),$$

där $g(t, u(t))$ är en kontinuerlig funktion, och $u(t)$ uppfyller begynnelsevillkoren $u(0) = \alpha, u'(0) = \beta$. Visa att denna diffekvation kan översättas till en integralekvation. Vilken typ av integralekvation är detta?

4. En hägring i en het öken uppstår på grund av att ljuset färdas snabbare i varm luft än i kall (eftersom den varma luften är tunnare än den kalla). Visa med hjälp av variationskalkyl och Fermats princip *("en ljusstråle mellan två punkter följer den snabbaste vägen")* att i detta fall en ljusstråle från en ljuskälla i punkten A med kartesiska koordinater $(x_A, y_A, z_A) = (l, 0, h_A)$ till en observatör i punkten $B = (x_B, y_B, z_B) = (0, 0, h_B)$ följer en konvex kurva med formen av en elliptisk båge. Öknen antas här vara helt platt, med l markavståndet mellan ljuskällan och observatören, och h_A respektive h_B deras höjd ovan mark. (1/2 bonuspoäng: Kan du förklara hur en hägring hänger ihop med den konvexa kurvan?) Ledning: Skriv ljushastigheten som $v(h) = v_0 - h/a$, där v_0 är hastigheten vid (den heta!) marken, h är höjden ovan mark, och a är en parameter.

5. En regelbunden tetraeder är en polyeder som består av fyra liksidiga trianglar där tre sidor möts i varje hörn. Hur många inekvivalenta irreducibla representationer har tetraederns symmetrigrupp?

Lösningsskisser, tentamen: MATEMATISK FYSIK 14/1 2019

1. Se föreläsningsanteckningar

2. $B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$, $B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$, $z = x+iy$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{z} \Rightarrow \oint_C f(z)\,dz \overset{\text{residyteoremet}}{=} i\mu_0 I \quad (*)$$

Vi har också att $\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (B_y + iB_x)(dx + i\,dy)$

$$= \underbrace{\cancel{\oint_C (B_y\,dx - B_x\,dy)}}_{\text{från } (*)} + i\oint_C (B_x\,dx + B_y\,dy) \quad \text{VSB}$$

3. Föreläsningsanteckningar.

4. $$\Delta t = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_A^B \frac{1}{v_0 - z/a}\,ds = \int_A^B \underbrace{\frac{1}{v_0 - a/z}\left(\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1\right)^{1/2}}_{f(x_z,\, z),\ x_z \equiv \frac{dx}{dz}} dz$$

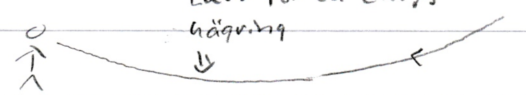
oberoende variabel

Euler: $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=0} - \frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial x_z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{(v_0 - z/a)C_1}{(1 - (v_0 - z/a)^2 C_1^2)^{1/2}}$$

Ekv. för en ellips

hägring



variabelseparation integrera! $\Rightarrow (x + C_2)^2 + a^{-2}(z - av_0)^2 = C_1^{-2}$, C_1, C_2 konstanter

5. Varje symmetritransformation $\in G$ på en regelbunden tetraeder svarar mot en permutation av de fyra hörnen $\Rightarrow G \simeq S_4$

S_4 har fem konjugatklasser $\Rightarrow$ fem inekvivalenta irreps

ges av permutationernas möjliga cykelstrukturer: $\begin{cases} (\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot);\ (\cdot\cdot)(\cdot)(\cdot); \\ (\cdot\cdot)(\cdot\cdot);\ (\cdot)(\cdot\cdot\cdot);\ (\cdot\cdot\cdot\cdot) \end{cases}$